Concursul Interjudețean de Matematică „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”

Ediția a XIX-a, Baia Mare, 14 noiembrie 2026

BAREM DE CORECTARE, CLASA A X-A

Subiectul 1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=1+\sqrt[3]{13x-1}$

a) Arătați că funcția f este bijectivă și determinați funcția inversă.

b) Determinați punctele de intersecție ale graficelor funcțiilor f și f^{-1}.

Soluție: Oficiu 1p

a) f este strict crescătoare rezultă că f este injectivă 1p

Fie $y\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=y\Leftrightarrow 1+\sqrt[3]{13x-1}=y\Leftrightarrow 13x-1=(y-1)^3\Leftrightarrow x=\dfrac{(y-1)^3+1}{13}\Rightarrow f$ este surjectivă. 2p

$f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f^{-1}(x)=\dfrac{(x-1)^3+1}{13}$. 1p

b) Graficele unei funcții strict crescătoare bijective și ale inversei se află pe prima bisectoare, deci avem de rezolvat ecuația $f(x)=x$. 2p

$f(x)=x\Leftrightarrow\sqrt[3]{13x-1}=x-1\Leftrightarrow 13x-1=(x-1)^3\Leftrightarrow x^3-3x^2-10x=0\Leftrightarrow x(x^2-3x-10)=0$ 2p

Se obțin soluțiile $x_1=0, x_2=-2, x_3=5$, iar punctele de intersecție sunt: $A(0,0)$, $B(5,5)$, $C(-2,-2)$. 1p

Subiectul 2. Determinați funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea $f(f(x)+3y)=12x+f(f(y)-x)$, pentru orice numere reale x și y.

Soluție: Oficiu 1p

Notăm $f(0)=a, a\in\mathbb{R}$.

În relația din enunț înlocuim $y=-\dfrac{f(x)}{3}$ și obținem $f\left(f\left(-\dfrac{f(x)}{3}\right)-x\right)=-12x+a, \forall x\in\mathbb{R}$ 1p

Funcția din membrul drept este surjectivă, deci și f este surjectivă 2p

Fie $x_1, x_2, y\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x_1)=f(x_2), f(y)=x_1+x_2$. **(1)**

Înlocuind relația din enunț obținem

$f(f(x_1)+3y)=12x_1+f(f(y)-x_1), f(f(x_2)+3y)=12x_2+f(f(y)-x_2)$. **(2)**

Din relațiile **(1)** și **(2)** obținem $x_1=x_2$, deci f este injectivă. 2p

Pentru $x=0$ în relația din enunț avem $f(f(y))=f(3y+a), \forall y\in\mathbb{R}$ 1p

f este injectivă $\Rightarrow f(y)=3y+a, \forall y\in\mathbb{R}$. 2p

Pentru orice $a\in\mathbb{R}, f(x)=3x+a$ verifică relația din enunț, deci este soluție. 1p

Subiectul 3. a) Demonstrați că, pentru orice $x,y,z\in[0,\infty)$ și orice m număr natural nenul, are loc inegalitatea

$$x^{2^m}+y^{2^m}+z^{2^m}\geq\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{2^{m-1}}}{3^{2^{m-1}-1}}.$$

b) Fie $a,b,c\in\mathbb{C}$, cu $|a|=|b|=|c|=1$. Notăm $S_n=|a+b|^n+|b+c|^n+|c+a|^n$ oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

Arătați că, dacă există $p\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $S_{2^p}\leq 3$, atunci pentru orice $n\in\mathbb{N}$, avem $S_n=3$.

Soluție: Oficiu 1p

a) Se demonstrează prin inducție matematică 3p

b) Aplicând a) pentru $x=|a+b|, y=|b+c|, x=|c+a|$, obținem:

$$S_{2^m}\geq\frac{(S_2)^{2^{m-1}}}{3^{2^{m-1}-1}}$$ 1p

Avem $S_2=|a+b|^2+|b+c|^2+|c+a|^2=|a|^2+|b|^2+|c|^2+|a+b+c|^2$ 2p

Din $S_2=3+|a+b+c|^2\Rightarrow S_2\geq 3\Rightarrow S_{2^m}\geq 3$, pentru orice $m\in\mathbb{N}^*$,

cu egalitate pentru $a+b+c=0$.....1p

Dacă există $p\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $S_{2^p}\leq 3$, cum $S_{2^p}\geq 3\Rightarrow S_{2^p}=3\Rightarrow a+b+c=0$. 1p

Atunci $S_n=|a+b|^n+|b+c|^n+|c+a|^n=|a|^n+|b|^n+|c|^n=3$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$,.....1p

Subiectul 4. Determinați $n\geq 3$ cu proprietatea că există o funcție bijectivă $f:\{1,2,...n\}\to\{1,2,...n\}$ pentru care k divide $f(1)+f(2)+...+f(k)$, pentru orice $k\in\{1,2,...n\}$.

Soluție: Oficiu 1p

Deoarece funcția f este bijectivă, avem $f(1)+f(2)+...+f(n)=\frac{n(n+1)}{2}$

Din $n\,|\,f(1)+f(2)+...+f(n)\Rightarrow n\left|\frac{n(n+1)}{2}\right.\Rightarrow\frac{n+1}{2}\in\mathbb{N}\Rightarrow n=2p+1, p\in\mathbb{N}^*$ 2p

Avem $2p\,|\,f(1)+f(2)+...+f(2p)$

Cum $f(1)+f(2)+...+f(2p)=\frac{(2p+1)(2p+2)}{2}-f(2p+1)=(2p+1)(p+1)-f(2p+1)$

rezultă $2p\,|\,(2p+1)(p+1)-f(2p+1)\Rightarrow 2p\,|\,2p(p+1)+(p+1)-f(2p+1)\Rightarrow$

$$2p\,|\,f(2p+1)-(p+1)$$ **(1)** 1p

Cum $f(2p+1)-(p+1)\in\{-p,-p+1,...,p-1,p\}$ din **(1)** rezultă

$f(2p+1)-(p+1)=0\Rightarrow f(2p+1)=p+1$ 1p

Avem $2p-1 \mid f(1)+f(2)+\ldots+f(2p-1)$,

Cum $f(1)+f(2)+\ldots+f(2p-1)=(2p+1)(p+1)-f(2p+1)-f(2p)=(2p+1)(p+1)-(p+1)-f(2p)$

rezultă $f(1)+f(2)+\ldots+f(2p-1)=2p(p+1)-f(2p)$

Atunci $2p-1 \mid 2p(p+1)-f(2p) \Rightarrow 2p-1 \mid (2p-1)(p+1)+p+1-f(2p) \Rightarrow$

$$2p-1 \mid f(2p)-(p+1) \qquad \textbf{(2)}$$ 1p

În plus, avem $f(2p)-(p+1) \in \{-p,-p+1,\ldots,p-1,p\}$ **(3)**

Dacă $p \geq 2 \Rightarrow 2p-1 > p$ și folosind relațiile **(2)** și **(3)** $\Rightarrow f(2p)-(p+1)=0 \Rightarrow f(2p)=p+1$ 1p

dar $f(2p+1)=p+1$ ceea ce contrazice injectivitatea funcției f.....1p

Prin urmare, $p=1, n=3$.....1p

Funcția $f=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$ sau $f=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$ verifică condițiile din enunț.....1p